第２講　複素数と漸化式，面積と極限，積分と漸化式

4　次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1=1,\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．ただし，i は虚数単位である．

(1)　z_2，z_3 を求めよ．

(2)　上の漸化式を $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ．

(3)　一般項 z_n を求めよ．

(4)　$z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ．

《04 北大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

5　e を自然対数の底とし，t を $t>e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C: y=e^x$ と直線 $y=tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする．また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，

曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，

曲線 C および 2 つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S_2

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ．

(2)　$\alpha<\dfrac{e}{t}$，$\beta<2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x>0$ のとき $e^x>x^2$ であることを証明なしに用いてよい．

《15 名大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6　n は自然数，a は $a>\dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし，実数 x の関数

$$f(x)=\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)\,d\theta$$

を考える．ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$ を示せ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ をみたす n と a の値を求めよ．

(3) (2)で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ．

《15 北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　複素数と漸化式，面積と極限，積分と漸化式

4 次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1=1,\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．ただし，i は虚数単位である．

(1) z_2，z_3 を求めよ．

(2) 上の漸化式を $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ．

(3) 一般項 z_n を求めよ．

(4) $z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ．

《04 北大・理系》

【答】 (1) $z_2=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$，$z_3=1+i\sqrt{3}$　(2) $\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3) $z_n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$　(4) $n=6k+5\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

【解説】 (1) $\boldsymbol{z_2}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1+1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+1=\boldsymbol{\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}}$，

$\boldsymbol{z_3}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2+1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}+1=\boldsymbol{1+i\sqrt{3}}$．

(2) $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)\iff z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\alpha$ より

$\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\alpha=1$　よって $\boldsymbol{\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}}$．

(3) (2)より $z_n-\alpha=(z_1-\alpha)\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ よって $\boldsymbol{z_n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}}$．

(4) $z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ より

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=-1$$

$$\iff \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2}=-1$$

$$\iff \cos\frac{n-2}{3}\pi+i\sin\frac{n-2}{3}\pi=\cos\pi+i\sin\pi$$

$\dfrac{n-2}{3}\pi\geqq-\dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{n-2}{3}\pi=(2k+1)\pi\ (k=0,\ 1,\ \cdots)$

よって $\boldsymbol{n=6k+5\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

5　e を自然対数の底とし，t を $t>e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C: y=e^x$ と直線 $y=tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする．また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，

曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，

曲線 C および 2 つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S_2

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ．

(2)　$\alpha<\dfrac{e}{t}$，$\beta<2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x>0$ のとき $e^x>x^2$ であることを証明なしに用いてよい．

《15 名大・理系》

【答】（1）$\dfrac{1-\alpha\beta}{2}$　　（2）$\dfrac{1}{2}$

【解説】（1）$e^x=tx$ の 2 つの実数解が α と β より，$e^\alpha=t\alpha$　…①，$e^\beta=t\beta$　…②が成り立つ．

このとき $S_1=\displaystyle\int_\alpha^\beta e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_\alpha^\beta=e^\beta-e^\alpha$ なので，①と②を用いて $S_1=t(\beta-\alpha)$ となる．

また，$y=e^x$ のとき $y'=e^x$ より P における接線は

$y=e^\alpha(x-\alpha)+e^\alpha$　　∴　$y=e^\alpha x+(1-\alpha)e^\alpha$ となるので，①を用いると

$y=t\alpha x+t\alpha(1-\alpha)$ となる．同様に Q における接線も $y=t\beta x+t\beta(1-\beta)$ となるので，2 式を連立して

$$t\alpha x+t\alpha(1-\alpha)=t\beta x+t\beta(1-\beta)\iff t(\beta-\alpha)(x-\alpha-\beta+1)=0$$

なので $x=\alpha+\beta-1$ より $\mathrm{R}(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$ を得る．よって

$$S_2=S_1-\left\{\frac{(t\alpha+t\alpha\beta)(\beta-1)}{2}+\frac{(t\beta+t\alpha\beta)(1-\alpha)}{2}\right\}=S_1-\frac{t}{2}(\beta-\alpha)(1+\alpha\beta)$$

となるので，$\dfrac{S_2}{S_1}=1-\dfrac{1}{2}(1+\alpha\beta)=\boldsymbol{\dfrac{1-\alpha\beta}{2}}$．

（2）$f(x)=e^x-tx$ とおくと，$f'(x)=e^x-t$ より $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	$\log t$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

このとき $f(0)=1>0$，$f(1)=e-t<0$ より $0<\alpha<1$，$\beta>1$ がわかる．

ここで①より $t=\dfrac{e^\alpha}{\alpha}$ なので $\dfrac{e}{t}-\alpha=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha-1}}-\alpha=\dfrac{\alpha(1-e^{\alpha-1})}{e^{\alpha-1}}>0$ よって $\dfrac{e}{t}>\alpha$ が示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また②より $t=\dfrac{e^{\beta}}{\beta}$ なので $2\log t-\beta=2\log\dfrac{e^{\beta}}{\beta}-\beta=\beta-2\log\beta$ である.

$g(\beta)=\beta-2\log\beta$ とおくと $g'(\beta)=1-\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{\beta-2}{\beta}$ なので $g(\beta)$ の増減は次のようになる.

β	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(\beta)$		$-$	0	$+$
$g(\beta)$		↘		↗

$g(2)=2-2\log 2=\log\dfrac{e^2}{2^2}>0$ ($\because$ $e^x>x^2$) より

$g(\beta)>0$ つまり $\beta<2\log t$ が示された.

以上より $0<\alpha<\dfrac{e}{t}$, $0<\beta<2\log t$ なので $0<\alpha\beta<2e\cdot\dfrac{\log t}{t}$ であるが, $t>e$ より

$\log t>0$ なので $0<\dfrac{\log t}{t}=\dfrac{\log t}{e^{\log t}}<\dfrac{1}{\log t}$ ($\because$ $e^x>x^2$) となり $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{\log t}=0$ より

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\alpha\beta=0$. よって $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\dfrac{S_2}{S_1}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6　n は自然数，a は $a>\dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし，実数 x の関数

$$f(x)=\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta$$

を考える．ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする．

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$ を示せ．

(2)　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ をみたす n と a の値を求めよ．

(3)　(2)で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ．

《15 北大・理系》

【答】 (1)　略　　(2)　$n=1$，$a=2$　　(3)　$-\dfrac{1}{2}$

【解説】 (1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta &= \Big[-\cos\theta\sin^n\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)\cdot n\sin^{n-1}\theta\cos\theta d\theta\\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\sin^{n-1}\theta d\theta\\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta-n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta\end{aligned}$$

より $(n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$ となるので

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$ が示された．

(2)　$\displaystyle f(x)=x\int_0^x(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta-\int_0^x\theta(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta$ より

$$\begin{aligned}f'(x) &= \int_0^x(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta+x(a\sin^{n+1}x-\sin^{n-1}x)-x(a\sin^{n+1}x-\sin^{n-1}x)\\ &= \int_0^x(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta\end{aligned}$$

なので $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \iff \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta=0$

$\iff a\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta=0$

これに(1)の結果を代入すると $\left(\dfrac{an}{n+1}-1\right)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta=0$ となるが，$n\geqq1$ のとき

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin^{n-1}\theta>0$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta>0$．よって $\dfrac{an}{n+1}-1=0$ つまり

$a=1+\dfrac{1}{n}$ となる．

ここで $a>\dfrac{3}{2} \iff 1+\dfrac{1}{n}>\dfrac{3}{2}$ なので $n<2$ つまり $\boldsymbol{n=1}$．ゆえに $\boldsymbol{a=2}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$n=1$，$a=2$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-\theta)(2\sin^2\theta-1)\,d\theta \\ &= \int_0^x (\theta-x)\cos 2\theta\,d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta\sin 2\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta-\frac{1}{2}x\sin 2\theta\right]_0^x=\frac{1}{4}(\cos 2x-1) \end{aligned}$$

となるので，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。